Kompleks Funktionsteori
Opgavesæt A

Albert B. Carlson (kgv619)

29. november 2024

"The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex plane." — Jacques Hadamard

§ 1

Betragt funktionen
$$f(z) = e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

§ 1 (a)

Betragt billedmængden $B = \{f(\gamma(t)) \mid t \in [2,4]\}$, hvor $\gamma(t) = t + \sqrt{2\pi}i$. Begrund hvilke af punkterne 0 eller 1 der tilhører B.

Påstand — 1, men ikke 0, tilhører B.

Bevis. Bemærk først, at $1 \in B$ idet $\sqrt{2\pi} \in [2,4]$ [1] og

$$\begin{aligned} f(\gamma(\sqrt{2\pi})) &= f(\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi}i) \\ &= \exp(-(\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi}i)^2/2) \\ &= \exp(-(2\pi - 2\pi + 2 \cdot 2\pi i)/2) \\ &= \exp(-2\pi i) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Nu vises, at $0 \notin B$. Hvis, for modstrid, $0 \in B$ ville $f(z) = \exp(-z^2/2)$ og dermed $\exp(z)$ have et nulpunkt i $\mathbb{C}$. Men hvis $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ opfylder $\exp(z) = 0$ er

$$0 = |0| = |\exp(z)| = |\exp(a+ib)| = |\exp(a)\exp(ib)| = |\exp(a)||\exp(ib)| = |\exp(a)| > 0$$

hvilket er en modstrid. Uligheden følger af at exp velkendt er strengt positiv på $\mathbb{R}$. $\square$

§ 1 (b)

Bestem samtlige løsninger til ligningen $f(z) = 1$ i den komplekse plan og skitsér beliggenheden af nogle af dem.

[1] Dette ses fx ved, at $2 \leqslant \pi \leqslant 8$ så $2 = \sqrt{4} \leqslant \sqrt{2\pi} \leqslant \sqrt{16} = 4$.

Påstand — Løsningsmængden til $f(z) = 1$ over $\mathbb{C}$ er givet ved

$$\{\pm\sqrt{2\pi p} \pm i\sqrt{2\pi p} \mid p \in \mathbb{N}_0\}.$$

Bevis. Antag, at der for et $z \in \mathbb{C}$ gælder at $f(z) = 1$, dvs. $\exp(-z^2/2) = 1$. Ifølge Thm. 1.18 haves da, at

$$-z^2/2 = -2\pi i p$$

for et $-p \in \mathbb{Z}$. Altså $z^2 = 4\pi i p$, dvs. z^2 er rent imaginær, hvoraf det tolkes, at z derved ligger på en af "diagonalerne" af det komplekse plan, altså at $z = a \pm ai$ for et $a \in \mathbb{R}$. Ydermere er $|z^2| = |4\pi i p| = 4\pi|p|$, men ligeledes $|z|^2 = a^2 + (\pm a)^2 = 2a^2$, altså

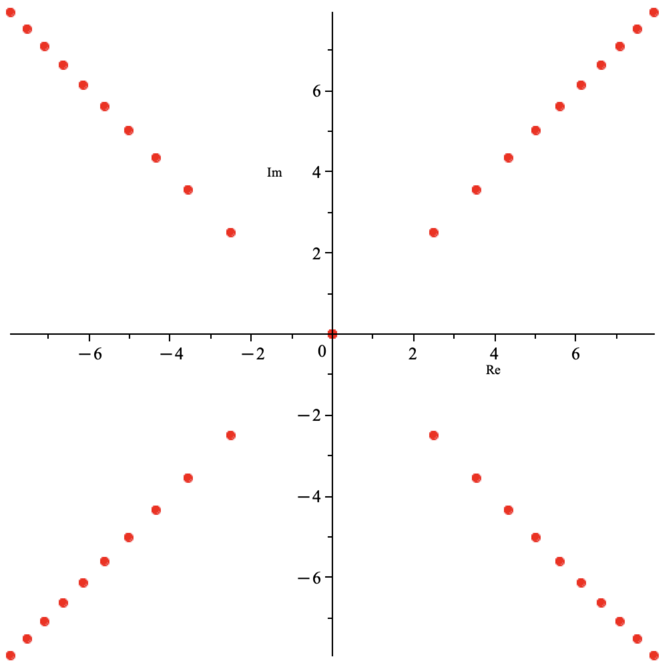
$$\begin{aligned} 2a^2 &= 4\pi|p| \\ \implies a &= \pm\sqrt{2\pi|p|}. \end{aligned}$$

Det tjekkes nu, at samtlige løsninger på denne form faktisk virker; givet $z = a \pm ai = \pm\sqrt{2\pi q} \pm i\sqrt{2\pi q}$ for et $q \in \mathbb{N}_0$ (hvor de to $\pm$'er kan vælges uafhængigt af hinanden) fås

$$f(z) = \exp\left(-\frac{(\pm\sqrt{2\pi q} \pm i\sqrt{2\pi q})^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi q + i^2 2\pi q \pm 2\cdot 2\pi q i}{2}\right) = \exp(\mp 2\pi q i) = 1$$

hvilket bekræfter hypotesen, så løsningsmængden er givet ved $\{\pm\sqrt{2\pi p} \pm i\sqrt{2\pi p} \mid p \in \mathbb{N}_0\}$ som ønsket. $\square$

Nu plotter vi nogle af løsningerne.



Løsninger nær origo til $f(z) = 1$ plottet vha. Maple.

§ 1 (c)

Lad $\Omega_a = \{z \in K(0, a) \mid \Re(z) > 0\}$. Vis, at f er injektiv i $\Omega_{\sqrt{2\pi}}$.

Bevis. Antag, at $f(z) = f(w)$ for $z, w \in \Omega_{\sqrt{2\pi}} \subseteq K(0, \sqrt{2\pi})$. Da har vi, at $|z|^2, |w|^2 < 2\pi$, samt at

$$\begin{aligned} e^{-z^2/2} = e^{-w^2/2} &\iff e^{(z^2-w^2)/2} = 1 \\ &\iff \frac{z^2 - w^2}{2} = 2\pi i p \qquad \text{for et } p \in \mathbb{Z} \\ &\iff z^2 - w^2 = 4\pi i p \end{aligned} \tag{1}$$

så det følger det af trekantsuligheden, at

$$4\pi|p| = |4\pi i p| = |z^2 - w^2| \leqslant |z|^2 + |w|^2 < 4\pi$$

så $p = 0$ og derved viser (1) at $z^2 = w^2$. At $z \neq -w$ følger af, at $\Re(z), \Re(w) > 0$. Altså er $z = w$ og derved er f injektiv i $\Omega_{\sqrt{2\pi}}$ som ønsket. □

§ 2

For potensrækken

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

indføres $T_f = \{t \geqslant 0 \mid |a_n|t^n \text{ er en begrænset følge}\}$ og konvergensradius $\rho_f = \sup T_f$. Konvergensradius kan også udtrykkes ved

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

§ 2 (a)

Lad $a_n = n(n-1), n = 0, \dots$ og lad $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Vis, at $\rho_g = 1$ og at der gælder

$$g(z) = \frac{2z^2}{(1-z)^3}$$

for $|z| < 1$.

¶ $\rho_g = 1$

Bevis. Definer

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

og genkald, at G har konvergensradius $\rho_G = 1$. Ved at anvende Lemma 1.11 og Thm. 1.12 to gange fås, at

$$G''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}$$

for $|z| < \rho_{G''} = \rho_G = 1$, så

$$z^2 G''(z) = g(z)$$

har nødvendigvis samme konvergensradius, dvs. $\rho_g = 1$ som ønsket. □

¶ $g(z) = \dfrac{2z^2}{(1-z)^3}$

Bevis. Genkald nu, at $G(z) = \dfrac{1}{1-z}$ for $|z| < \rho_G = 1$, så

$$G''(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' = \frac{2}{(1-z)^3}$$

og ergo er

$$g(z) = z^2 G''(z) = \frac{2z^2}{(1-z)^3}$$

for $|z| < 1$, som ønsket. □

§ 2 (b)

Lad

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = z + z^2 + z^6 + z^{24} + \dots.$$

Bestem talfølgen $\{a_n\}$ så $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ og bestem dernæst T_h og ρ_h. Findes grænseværdien $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$?

Det ses klart, at følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er givet ved

$$a_k = \begin{cases} 1 & k = m! \text{ for et } m \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad \text{for alle } k \in \mathbb{N}.$$

Bemærk specielt, at $|a_k| \leqslant 1$ for alle $k \in \mathbb{N}$.

Påstand — $T_h = [0,1]$ og $\rho_h = 1$.

Bevis. Det ses for $0 \leqslant t \leqslant 1$, at $|a_n|t^n \leqslant 1 \cdot 1^n = 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$, så følgen $|a_n|t^n$ er altså begrænset for disse t. Men for $t > 1$ antager følgen vilkårligt store værdier: for et vilkårligt $N > 0$ har vi at for et vilkårligt tilstrækkeligt stort naturligt tal $n > \ln N/\ln t$ at $n! \geqslant n$ og at

$$|a_{n!}|t^{n!} = t^{n!} > t^{\ln N/\ln t} = e^{\ln t \cdot \ln N/\ln t} = e^{\ln N} = N$$

som ønsket. Altså er $T_h = [0,1]$.

Heraf ses, at $\rho_h = \sup T_h = \sup[0,1] = 1$. □

Påstand — Grænseværdien $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ findes ikke.

Bevis. Antag for modstrid at grænseværdien eksisterer og kald denne L.

Vi opdager, at for $\varepsilon = 1/4$ gælder, at uanset hvor stort et naturligt tal $N \geqslant 2$ du måtte vælge, er $N! \geqslant N$ og

$$a_{N!} = 1 = \sqrt[N!]{|1|} = \sqrt[N!]{|a_{N!}|}$$

og

$$a_{N!+1} = 0 = \sqrt[N!+1]{|0|} = \sqrt[N!+1]{|a_{N!+1}|}$$

så det følger af trekantsuligheden, at

$$\begin{aligned} 1 = |1| &= |1 - L + L| \\ &\leqslant |1 - L| + |-L| \\ &= |\sqrt[N!]{|a_{N!}|} - L| + |\sqrt[N!+1]{|a_{N!+1}|} - L| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

hvilket er en modstrid da $1 \nleqslant 1/2$, så grænseværdien eksisterer altså ikke. □

§ 3

Lad

$$f(z) = \frac{z+2}{z-i}.$$

§ 3 (a)

Vis, at $f\colon \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$ er bijektiv og bestem dens inverse funktion.

Bevis. Bemærk, at $f^{-1}\colon \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{i\}$ givet ved

$$f^{-1}(w) = \frac{wi+2}{w-1}$$

opfylder, at

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ f)(z) &= f^{-1}\left(\frac{z+2}{z-i}\right) \\
&= \frac{\frac{z+2}{z-i}i + 2}{\frac{z+2}{z-i} - 1} \\
&= \frac{(z+2)i + 2(z-i)}{z+2-(z-i)} \\
&= \frac{zi + 2i + 2z - 2i}{z+2-z+i} \\
&= \frac{(2+i)z}{2+i} \\
&= z
\end{aligned}$$

for samtlige $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, og

$$\begin{aligned}
(f \circ f^{-1})(w) &= f\left(\frac{wi+2}{w-1}\right) \\
&= \frac{\frac{wi+2}{w-1} + 2}{\frac{wi+2}{w-1} - i} \\
&= \frac{wi+2+2(w-1)}{wi+2-i(w-1)} \\
&= \frac{(2+i)w}{2+i} \\
&= w
\end{aligned}$$

for samtlige $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Vi har altså konstrueret inversen, hvilket samtidig viser, at f er bijektiv. □

§ 3 (b)

> Skitsér kurverne $\gamma_1(t) = t$ og $\gamma_2(t) = it$ for $t \in \mathbb{R}$.
> Vis, at billedkurverne $t \mapsto f(\gamma_1(t))$ og $t \mapsto f(\gamma_2(t))$ skærer hinanden i punktet $2i$ og bestem en skæringsvinkel.

Kurverne γ_1 og γ_2 er hhv. den reelle og imaginære akse, og behøver derfor ingen skitse.

Det ses, at $f(\gamma_1(0)) = 2i = f(\gamma_2(0))$, og derved at begge kurver går gennem, og dermed skærer hinanden, i $2i$. Skæringsvinklen er ret, idet f er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ (da den er en kvotient af holomorfe funktioner), og ydermere er

$$f'(z) = \frac{(z+2)'(z-i) - (z+2)(z-i)'}{(z-i)^2} = -\frac{2+i}{(z-i)^2} \neq 0$$

så det følger af *angle preserving*-egenskaben gennemgået på s. 16, at f er konform i 0, så skæringsvinklen er ret, da de to originale kurver oplagt er ortogonale.

> Vis, at billedmængden $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) = \{f(\gamma_2(t)) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}$ er en ret linje på nær ét punkt og bestem en parameterfremstilling eller lignende for den.
> Vis endvidere, at $f(\mathbb{R}) = \{f(\gamma_1(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ er en cirkel på nær et enkelt punkt og angiv cirklens centrum og radius.
> Skitsér billedmængderne i den komplekse plan.

Påstand — Billedmængden $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$ danner linjen parameteriseret ved

$$1 + (1-2i)s, \qquad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Bevis. Lad $s = 1/(t-1)$ og bemærk, at s dermed antager alle reelle værdier undtagen 0 når t løber gennem $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Så for et $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ har vi

$$f(\gamma_2(t)) = f(it) = \frac{it+2}{it-i} = \frac{i(it+2)}{i(it-i)} = \frac{t-2i}{t-1} = \frac{t-1+1-2i}{t-1} = 1 + (1-2i)s.$$

$\square$

Påstand — Billedmængden $f(\mathbb{R})$ danner cirklen

$$\partial K\left(\frac{1}{2} + i, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \setminus \{1\}.$$

Bevis. Vi viser først, at $f(\mathbb{R}) \subseteq \partial K\left(\frac{1}{2} + i, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \setminus \{1\}$. Lad derfor $t \in \mathbb{R}$. Da haves

$$\begin{aligned}
\left|f(t) - \left(\frac{1}{2} + i\right)\right|^2 &= \left|\frac{t+2}{t-i} - \left(\frac{1}{2} + i\right)\right|^2 \\
&= \left|\frac{2(t+2)(t+i)}{2(t-i)(t+i)} - \frac{(t-i)(t+i)}{2(t-i)(t+i)} - \frac{2i(t-i)(t+i)}{2(t-i)(t+i)}\right|^2 \\
&= \left|\frac{2(t^2+ti+2t+2i) - (t^2+1) - 2i(t^2+1)}{2(t^2+1)}\right|^2 \\
&= \left|\frac{2t^2+2ti+4t+4i-t^2-1-2it^2-2i}{2(t^2+1)}\right|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{(t^2+4t-1)+i(2t+4-2t^2-2)}{2(t^2+1)} \right|^2 \\
&= \left(\frac{t^2+4t-1}{2(t^2+1)} \right)^2 + \left(\frac{2t+4-2t^2-2}{2(t^2+1)} \right)^2 \qquad \text{da } |z|^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2 \\
&= \frac{(t^4+16t^2+1+8t^3-2t^2-8t)+(4t^2+4+4t^4+8t-8t^3-8t^2)}{4(t^2+1)^2} \\
&= \frac{5(t^2+1)^2}{4(t^2+1)^2} \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

hvilket viser, at alle punkter ligger en distance $\sqrt{5}/2$ fra det angivne centrum. For at fuldføre denne del af inklusionen tjekkes, at $1 \notin f(\mathbb{R})$ idet $f(z) = 1 \iff z+2 = z-i \iff 2 = i$, hvilket ikke er tilfældet.

Den omvendte inklusion overlades til læseren. :) $\square$