Kompleks Funktionsteori
Opgavesæt B

ALBERT B. CARLSON (KGV619)

13. december 2024

"Ça me semble extrêmement plaisant de ficher comme ça beaucoup de choses, pas drôles quand on les prend séparément, sous le grand cheapeau des foncteurs dérivés." — A. Grothendieck, februar 1955

§ 1

Lad

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 4}.$$

§ 1 (a)

Bestem konvergensradius ρ for Taylorrækken for f med centrum i 0.

Påstand — $\rho = 2$.

Bevis. Af 4.8 får vi, at $\rho \geqslant 2$, idet f er lig summen af Taylorrække med centrum i 0 i den største åbne kugle indeholdt i $\mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\}$, som er definitionsmængden af f. Denne kugle er netop $K(0, 2)$.

At ρ faktisk er 2 følger af, at $f(z) \to \infty$ for $z \to \pm 2i$, idet nævneren går mod 0 og tælleren mod hhv. $e^2 > 0$ og $e^{-2} > 0$, så singulariteten kan ikke hæves. $\square$

§ 1 (b)

Vis, at Taylorrækken for f med centrum i 0 er givet ved

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

hvor $a_0 = a_1 = 1/4$ og

$$a_k = \frac{1}{4k!} - \frac{a_{k-2}}{4}, \qquad k = 2, 3, \ldots.$$

Bestem herved værdien af $f^{(5)}(0)$.

Bevis. Af definitionen af f udledes, at $e^z = (z^2+4)\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ så ved indsættelse af eksponentialfunktionens Taylorrække fås, at

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k &= (z^2+4)\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(z^2+4)a_k z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 4a_k z^k + a_k z^{k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 4a_k z^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} z^k \\ &= 4a_0 + 4a_1 z + \sum_{k=2}^{\infty}(4a_k + a_{k-2})z^k\end{aligned}$$

så ved vha. 1.14 at sammenligne koefficienter får vi, at $4a_0 = 1/0! = 1 = 1/1! = 4a_1$ så $a_0 = a_1 = 1/4$ som ønsket, og for $k \geqslant 2$ er

$$\frac{1}{k!} = 4a_k + a_{k-2}$$

som let omskrives til det ønskede. □

Påstand — $f^{(5)}(0) = 7/8$.

Bevis. Vi ved af 1.13, at $f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$, så

$$f^{(5)}(0) = 5! \cdot a_5 = 5!\left(\frac{1}{4\cdot 5!} - \frac{a_3}{4}\right) = 5!\left(\frac{1}{4\cdot 5!} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4\cdot 3!} - \frac{a_1}{4}\right)\right) = \frac{7}{8}.$$

□

§ 1 (c)

Udregn værdien af kurveintegralet

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(1/2,1)} \frac{e^z}{z^8 + 4z^6}dz,$$

idet kurven gennemløbes én gang mod uret.

Påstand — Integralets værdi er 7/960.

Bevis. Af Cauchys formel for den n'te afledte har vi, idet f er holomorf i hele $K(1/2,1)$, at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(1/2,1)} \frac{e^z}{z^8+4z^6}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(1/2,1)} \frac{f(z)}{z^6}dz = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{7}{8\cdot 5!} = \frac{7}{960}.$$

□

§ 2

§ 2 (a)

Om en hel funktion f vides, at uligheden $|f(z)| \leqslant (\ln|z|)^{2023}$ gælder for alle $|z| \geqslant 10$. Vis, at f må være konstant.

Bevis. Idet f er hel følger det af 4.8, at er f lig med sin Taylorekspansion fra 0 i hele $\mathbb{C}$, altså at

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Vi ønsker at vise, at $f^{(k)}(0) = 0$ for alle $k \geqslant 1$, idet vi så har, at alle koefficienter undtagen den konstante er 0, hvorved f er konstant.

Af Cauchys formel for den n'te afledte og estimation lemma 2.8 har vi for alle $n \geqslant 1$ og $r \geqslant 10$ at

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(0)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz\right| \\
&= \frac{n!}{2\pi} \left|\int_{\partial K(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz\right| \\
&\leqslant \frac{n!}{2\pi} 2\pi r \sup_{z \in \partial K(0,r)} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \\
&= \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in \partial K(0,r)} |f(z)| \\
&\leqslant \frac{n!}{r^n} (\ln r)^{2023} \to 0 \quad \text{for} \quad r \to \infty.
\end{aligned}$$

Altså er $f^{(n)}(0) = 0$ så beviset er fuldført. □

§ 3

Lad u være en harmonisk funktion i et område Ω.

§ 3 (a)

Vis, at der for hvert $z_0 \in \Omega$ findes et $r_0 > 0$ så der gælder

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt$$

for $0 \leqslant r < r_0$.

Bevis. Idet Ω er et område (som pr. definition er åbent) vælges for z_0 et $r_0 > 0$ så $K(z_0, r_0) \subseteq \Omega$.

Da $K(z_0, r_0)$ er enkeltsammenhængende og u er harmonisk, konstruer da en holomorf funktion f med $\Re f = u$ i $K(z_0, r_0)$ jf. 4.10.

Da følger det af Cauchys Integralformel, at for alle $0 < r < r_0$ gælder, at

$$\begin{aligned} u(z_0) = \Re f(z_0) &= \Re \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right) \\ &= \Re \left(\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z_0} rie^{it} dt \right) \\ &= \Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re f(z_0 + re^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt \end{aligned}$$

som ønsket. For $r = 0$ er konklusionen triviel. □

§ 3 (b)

Antag, at den harmoniske funktion u har et lokalt maksimum i et punkt z_0. Vis, at u må være konstant i en (lille) kugle omkring z_0.

Bevis. Antag, at z_0 er maksimal i $K(z_0, r_0) \subseteq \Omega$ for et passende $r_0 > 0$. Da er

$$g(r, t) \coloneqq u(z_0) - u(z_0 + re^{it}) \geqslant 0$$

en ikke-negativ reel kontinuert funktion for alle $0 \leqslant t < 2\pi$ og alle $0 \leqslant r < r_0$, og ifølge 3 (a) er

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g(r, t) dt &= \int_0^{2\pi} u(z_0) - u(z_0 + re^{it}) dt \\ &= \int_0^{2\pi} u(z_0) dt - \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt \end{aligned}$$

$$= 2\pi u(z_0) - 2\pi u(z_0) = 0$$

hvoraf vi af kontinuiteten og ikke-negativiteten har, at $g(r,t) = 0$ for ethvert $t \in [0, 2\pi)$ og $r \in [0, r_0)$. Det konkluderes, at $g \equiv 0$ og dermed at u er konstant i $K(z_0, r_0)$. $\square$

§ 4

§ 4 (a)

Vis, at funktionen

$$u(z) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}$$

er harmonisk i $K(0, 1)$ og bestem de harmonisk konjugerede til u.

Observer, at

$$z \mapsto \frac{1 + z}{1 - z}$$

er holomorf i $K(0, 1) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Derved er dens realdel harmonisk i $K(0, 1)$, så ved at skrive $z = x + iy$ fås, at

$$\begin{aligned}
\frac{1+z}{1-z} &= \frac{1 + x + iy}{1 - x - iy} \\
&= \frac{(1 + x + iy)(1 - x + iy)}{(1 - x - iy)(1 - x + iy)} \\
&= \frac{1 - x^2 - y^2 + 2iy}{1 + x^2 - 2x + y^2} \\
&= \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(x - 1)^2 + y^2} + i\frac{2y}{(x - 1)^2 + y^2} \\
&= \frac{1 - |z|^2}{|z - 1|^2} + i\frac{2\Im(z)}{|z - 1|^2} \\
&= u(z) + i\frac{2\Im(z)}{|z - 1|^2}
\end{aligned}$$

og altså at u er harmonisk i $K(0, 1)$, som ønsket.

Det aflæses således ved brug af 4.10 at de harmonisk konjugerede til u er givet ved

$$v_c \colon z \mapsto \frac{2\Im(z)}{|z - 1|^2} + c$$

for $c \in \mathbb{R}$.