# LinAlg aflevering 1

Albert B. Carlson (kgv619)

26. november 2024

## §1.1

Vi løser **1.1.a** og **1.1.b** samtidig, idet de har samme variabelkoefficienter, men **1.1.a** blot er det tilhørende homogene ligningssystem af **1.1.b**, hvorved vi blot kan bortkaste konstantsøjlen til sidst.

Vi opskriver totalmatricen, $A$, for ligningssystemet. (*Mine LaTeX-skills tillader mig ikke at lave en vertikal linje i matricerne.*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 6 & a \\ 1 & -1 & 1 & 5 & 2a \\ 2 & 2 & 1 & 10 & a \end{pmatrix},$$

og Gausseliminerer for at få $A$ på reduceret echelonform

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 6 & a \\ 1 & -1 & 1 & 5 & 2a \\ 2 & 2 & 1 & 10 & a \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & a-1 \\ 1 & -1 & 1 & 5 & 2a \\ 2 & 2 & 1 & 10 & a \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & a-1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 2a-1 \\ 2 & 2 & 1 & 10 & a \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & a-1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 2a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & a-2 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & a-1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & a-2 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & a-1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \quad | \cdot (-1) \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {}^{+} \\ {}_{-1} \\ \mid \cdot (-1) \\ \phantom{0} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1+a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

## §1.1.a

Nu ignorerer vi midlertidligt højre søjle. Derfor udleder vi af de første tre rækker, at

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 = 0 &\implies x_1 = -2x_4 \\ x_2 + x_4 = 0 &\implies x_2 = -x_4 \\ x_3 + 4x_4 = 0 &\implies x_3 = -4x_4. \end{aligned}$$

Lader vi derfor $x_4 = -x$ være givet, fås at den tilhørende løsning er givet ved

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x, x, 4x, -x)$$

og derved at løsningsmængden kan parameteriseres ved

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

Ved indsættelse bekræftes let, at disse løsninger faktisk virker, og derved har vi fundet samtlige løsninger.

## §1.1.b

Nu husker vi igen sidste søjle. Af fjerde række udledes derved, at $0 = a - 1$ og derved er $a = 1$ det eneste reelle tal, hvor der potentielt er løsninger til det originale ligningssystem, idet løsningsmængden bevares under Gausselimination. Det ses, at der for $a = 1$ faktisk er løsninger, idet vi af de første tre rækker udleder, at

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 = 1 + a = 2 &\implies x_1 = 2 - 2x_4 \\ x_2 + x_4 = -a = -1 &\implies x_2 = -1 - x_4 \\ x_3 + 4x_4 = -1 &\implies x_3 = -1 - 4x_4. \end{aligned}$$

Lader vi derfor $x_4 = -x$ være givet, fås at den tilhørende løsning er givet ved

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x + 2, x - 1, 4x - 1, -x)$$

og derved at løsningsmængden kan parameteriseres ved

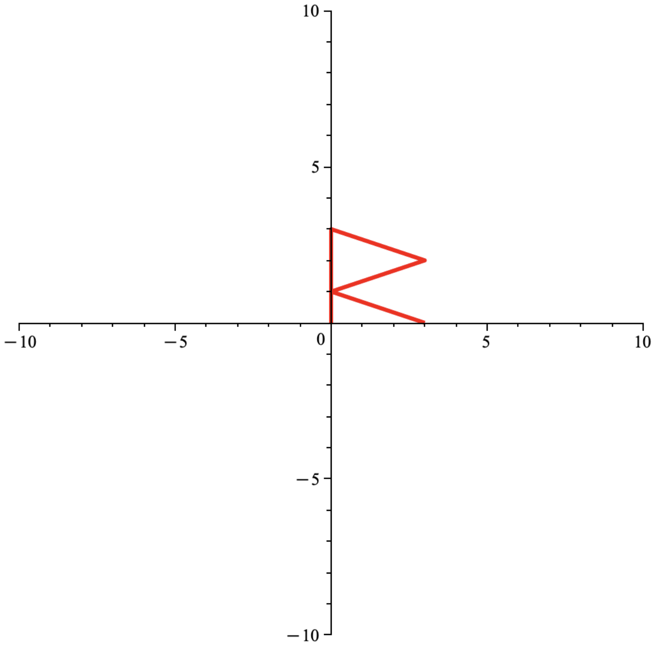
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + 2 \\ t - 1 \\ 4t - 1 \\ -t \end{pmatrix} \quad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

Ved indsættelse bekræftes let, at disse løsninger faktisk virker, og derved har vi fundet samtlige løsninger.

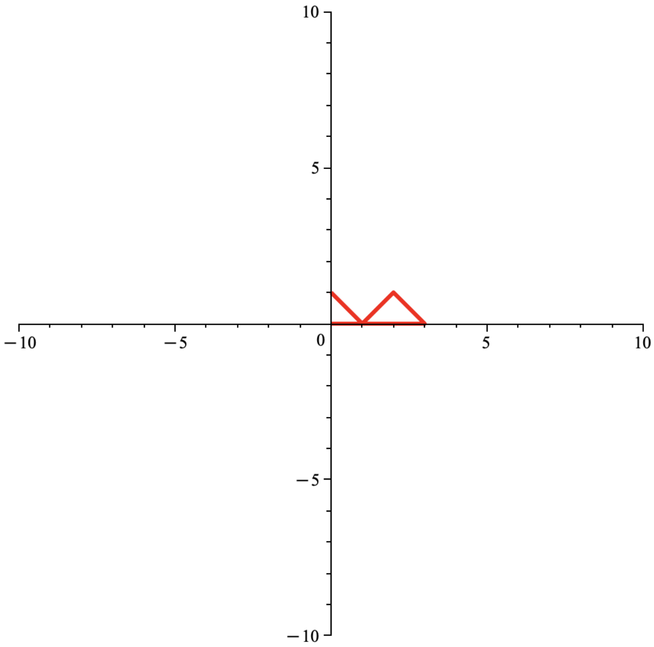
# §1.2

## §1.2.a

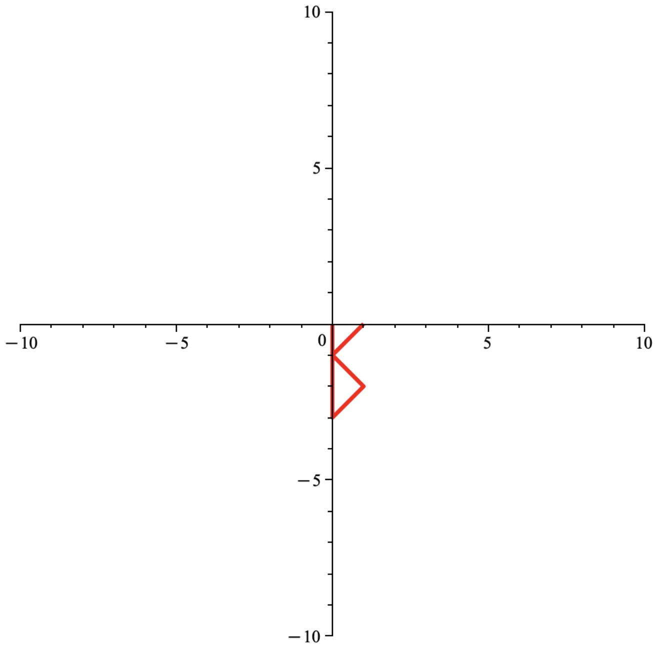
Nedenfor plottes de fire lineære transformationer af figuren, herefter kaldt $R$.



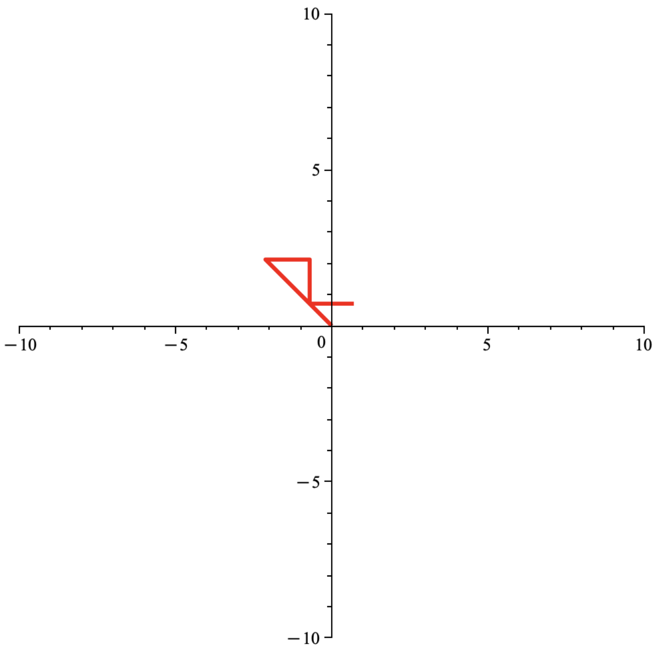

$M_1 R$ plottet vha. Maple.




$M_2 R$ plottet vha. Maple.




$M_3R$ plottet vha. Maple.




$M_4R$ plottet vha. Maple.

$M_1$ repræsenterer en **skalering** langs $x$-aksen med en faktor 3, idet den sender $(x, y)$ til $(3x, y)$, eftersom

$$M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 0y \\ 0x + 1y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ y \end{pmatrix}.$$

$M_2$ repræsenterer en **spejling**, idet den sender $(x, y)$ til $(y, x)$, som er en spejling i linjen $y = x$, eftersom

$$M_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x + 1y \\ 1x + 0y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

$M_2$ kan også ses som en **rotation med** $90°$ efterfulgt af en **spejling i** $y$**-aksen**.

$M_3$ repræsenterer en **spejling**, idet den sender $(x, y)$ til $(x, -y)$, som er en spejling i $x$-aksen, eftersom

$$M_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 0y \\ 0x - 1y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

$M_4$ repræsenterer en **rotation med** $45°$ i positiv omløbsretning, eftersom

$$M_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) \\ \sin(45°) & \cos(45°) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

som let ses at være en rotation ved at karakterisere $\mathbb{R}^2$ med $\mathbb{C}$.

## §1.2.b

**Påstand —** Matricen der spejler i $y$-aksen, $M$, er givet ved

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Bevis.* Bemærk, at $M$ spejler i $y$-aksen, da den sender $(x, y)$ til $(-x, y)$, idet

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1x & 0y \\ 0x & 1y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

hvilket netop var det ønskede. □

## §1.2.c

Figur 1 er mulig, da dette er en rotation, spejling og skalering (homoteti), hvilket netop er en lineær afbilding.

Figur 2 kan ikke fremkomme, idet $(0, 0)$ indgår i inputkurven men ikke billedkurven, hvilket er umuligt, idet

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 & b \cdot 0 \\ c \cdot 0 & d \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

for enhver $2 \times 2$ matrix $M$. Til gengæld er translationer affine afbildinger, men dette var ikke relevant for spørgsmålet.