MatIntro aflevering 1

Albert B. Carlson

17. september 2024

"Life is complex: it has real and imaginary components." — Tom Apostol

§1.1 Analyse

Betragt funktionen $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$$

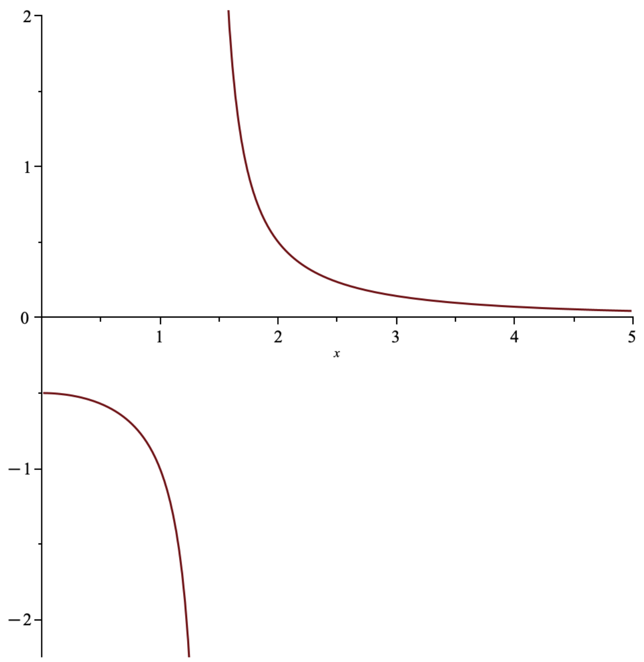
hvor $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x \neq \sqrt{2}\}$.

§1.1.a

> Tegn grafen for f ved hjælp af Maple, og benyt også Maple til at bestemme grænseværdierne $\lim_{x \to \sqrt{2}^-} f(x)$ og $\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x)$.

Nedenstående kommando anvendes til at tegne grafen i Maple.

```
f := 1/(x^2-2);
plot(f(x), x = 0 .. 5);
```



f plottet vha. Maple.

Nu bestemmes de to angivne grænseværdierne igen vha. Maples intuitive kommandoer ligeledes til at være hhv.

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = \infty.$$

§1.1.b

> Vis, at hvis $\sqrt{2} < x_1 < x_2$, så er $f(x_1) > f(x_2)$. Bestem desuden grænseværdien $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Antag, at $\sqrt{2} < x_1 < x_2$. Da er $x_1^2 < x_2^2$ eftersom $x \mapsto x^2$ er en strengt voksende funktion på $D_f \subseteq \mathbb{R}^+$ og derfor er ulighedsbevarende. Pga. harmoni med addition haves ligeledes $x_1^2 - 2 < x_2^2 - 2$. Ydermere er $x \mapsto x^{-1}$ strengt aftagende på D_f. Ergo

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1^2 - 2} > \frac{1}{x_2^2 - 2} = f(x_2)$$

som ønsket.

Det ses, at grænseværdien $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Sæt $N = \sqrt{2 + 1/\varepsilon}$ og bemærk at $N > \sqrt{2}$. Antag at $x > N > \sqrt{2}$, så

$$\frac{1}{x^2 - 2} > 0.$$

Da haves

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = \left|\frac{1}{x^2 - 2}\right| = \frac{1}{x^2 - 2} < \frac{1}{N^2 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2 + 1/\varepsilon}^2 - 2} = \varepsilon$$

hvor uligheden følger af samme argument som i første del af opgaven. □

§1.1.c

> Er f kontinuert?

Ja, da der for alle $x_0 \in D_f$ gælder at den er sin egen grænseværdi fra begge sider, altså at

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \forall x \in D_f.$$

For at forstå dette nær $x = \sqrt{2}$ er et topologisk argument som følger: da $D_f \subset \mathbb{R}$ er åben gælder der, at der for alle $x \in D_f$ eksisterer et nabolag omkring x hvorpå f er defineret.

§1.1.d

> Bestem mængden af løsninger til hver af disse uligheder: $f(x) < -1$ og $f(x) > 1$.

Lad $A := \{x \in D_f \mid f(x) < -1\}$ og $B := \{x \in D_f \mid f(x) > 1\}$. Vi viser, at $A = (1, \sqrt{2})$ og $B = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Bevis. Først undersøges A. Vi ønsker at finde x så $f(x) < -1$. Dette sker ved opdeling i tilfælde.

- *Case*: $x^2 - 2 > 0$ (så vi kan gange over uden at vende uligheden):

$$\begin{aligned} f(x) < -1 &\iff \frac{1}{x^2-2} < -1 \\ &\iff 1 < -1 \cdot (x^2 - 2) \\ &\iff -1 > x^2 - 2 \end{aligned}$$

  så $-1 > x^2 - 2 > 0$ hvilket er en modstrid, og der er derfor ingen løsninger her.

- *Case*: $x^2 - 2 < 0 \iff x < \sqrt{2}$ (vi skal vende uligheden):

$$\begin{aligned} f(x) < -1 &\iff \frac{1}{x^2-2} < -1 \\ &\iff 1 > -1 \cdot (x^2 - 2) \\ &\iff -1 > -x^2 \\ &\iff 1 < x^2 \\ &\iff 1 < x \end{aligned}$$

  Altså hvis $1 < x < \sqrt{2}$ er denne ulighed opfyldt.

Dette medfører netop at $A = (1, \sqrt{2})$.

Nu undersøges B vha. samme metode. Vi ønsker at finde x så $f(x) > 1$.

- *Case*: $x^2 - 2 > 0 \iff x > \sqrt{2}$ (så vi kan gange over uden at vende uligheden):

$$\begin{aligned} f(x) > 1 &\iff \frac{1}{x^2-2} > 1 \\ &\iff 1 > x^2 - 2 \\ &\iff 3 > x^2 \\ &\iff \sqrt{3} > x \end{aligned}$$

  så $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ hvilket medfører at $B \subseteq (\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

- *Case*: $x^2 - 2 < 0 \iff x < \sqrt{2}$ (vi skal vende uligheden):

$$\begin{aligned} f(x) > 1 &\iff \frac{1}{x^2-2} > 1 \\ &\iff 1 < x^2 - 2 \end{aligned}$$

  så $1 < x^2 - 2 < 0$ hvilket er en modstrid, og der opnås derfor ingen løsninger i dette tilfælde.

Derfor er B netop intervallet $B = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$. $\square$

> **Bemærkning.** Undervejs har vi bl.a. konkluderet at $1 < x^2 \iff 1 < x$ og $3 > x^2 \iff \sqrt{3} > x$. Det skal understreges, at dette ræsonnement beror på, at $x \in D_f \subseteq \mathbb{R}^+$, hvor det er sandt. Men det er ikke generelt sandt på $\mathbb{R}$. Vi har ladet dette være implicit.

§1.1.e

Forklar, hvorfor mmde ræsonnement må være forkert: Vi har at $f(1) = -1$, og $f(2) = 1/2$. Det følger derfor af Skæringssætningen at der findes et tal $c \in (1, 2)$, sådan at $f(c) = 0$.

Ræsonnementet må være forkert da dets konklusion er forkert, idet der faktisk ikke er noget nulpunkt, idet vi i så fald havde

$$f(x) = 0 \iff \frac{1}{x^2 - 2} = 0 \iff 1 = 0,$$

hvilket er en modstrid.

Vi kan også dykke dybere for at se hvor fejlen sker: Da funktionen ikke er sammenhængende på det givne interval (den har en asymptote i $x = \sqrt{2} \in (1, 2)$) kan vi ikke anvende Mellemværdisætningen.

§1.2 Komplekse tal

§1.2.a

Lad $r > 0$ og θ være reelle tal. Vis, at hvis $z = \ln(r) + i\theta$, så gælder $e^z = re^{\theta i}$.

Bevis. Antag at $z = \ln(r) + i\theta$. Da er

$$e^z = e^{\ln(r)+i\theta} = e^{\ln(r)} \cdot e^{i\theta} = re^{\theta i}$$

som ønsket. □

§1.2.b

Lad $r_1, r_2 > 0$ og θ_1, θ_2 være reelle tal. Forklar, at $r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$ hvis og kun hvis $r_1 = r_2$, og der findes et $k \in \mathbb{Z}$, så $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$.

Bevis. Vi starter med at vise at $r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \implies r_1 = r_2$. Antag derfor $r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$. Ved at tage absolutværdi på begge sider er

$$\left| r_1 e^{i\theta_1} \right| = \left| r_2 e^{i\theta_2} \right|$$

hvoraf det vha. regneregler for absolutværdi udledes at

$$|r_1| \left| e^{i\theta_1} \right| = |r_2| \left| e^{i\theta_2} \right|$$

og $e^{i\theta}$ ligger på enhedscirklen for alle $\theta \in \mathbb{R}$ så det har norm 1. Altså er

$$|r_1| = |r_2|.$$

Da $r_1, r_2 > 0$ er reelle tal er $|r_1| = r_1$ og $|r_2| = r_2$, ergo er

$$r_1 = r_2.$$

□

Nu ønsker vi at vise anden del af opgaven, dvs. vi skal vise at hvis $r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2}$ findes et $k \in \mathbb{Z}$, så $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$.

Bevis. Da vi lige har vist at $r_1 = r_2 > 0$ deler vi det ud. Det er altså tilstrækkeligt at vise, at hvis $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ findes et $k \in \mathbb{Z}$, så $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$. Vi hiver fat i definitionen af det komplekse eksponentiale:

$$e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)).$$

Ved indsættelse af $a = 0$ og $b = \theta_1, \theta_2$ opnås at

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} &= e^0(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \\ &= \cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1) \\ &= \cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2) \\ &= e^0(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) = e^{i\theta_2} \end{aligned}$$

netop når både deres realdele og imaginærdele er ens, dvs.

$$\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) \qquad \text{og} \qquad \sin(\theta_1) = \sin(\theta_2)$$

hvilket netop sker når $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$ for et $k \in \mathbb{Z}$ som ønsket, da sin og cos begge har periodelængde 2π. Derfor fås, at de begge to først er ens igen efter 2π, da dette er omkredsen af enhedscirklen, og vi er først tilbage til samme punkt efter én revolution. □

Desuden er den anden vej (“ $\Longleftarrow$ ”) åbenlys; hvis $r_1 = r_2$ og $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$ så er det klart, at

$$r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i(\theta_2+2\pi k)} = r_2e^{i\theta_2+2\pi ik} = r_2e^{i\theta_2} \cdot (e^{2\pi i})^k = r_2e^{i\theta_2}.$$

□

§1.2.c

Bestem alle løsninger til ligningen $e^z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ og tegn ved hjælp af Maple fem af disse løsninger som punkter i den komplekse talplan.

Samtlige løsninger er $z = i\theta$ hvor $\theta = \pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Med andre ord er løsningsmængden givet ved $\{i\theta \mid \theta = \pi/4 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Bevis. Det ses først og fremmest, at disse faktisk er løsninger, idet $z = i\theta$ medfører, at

$$e^z = e^{i\theta} = e^{i(\pi/4+2\pi k)} = e^{i\pi/4+2\pi ik} = e^{i\pi/4} \cdot e^{2\pi ik} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot 1^k = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

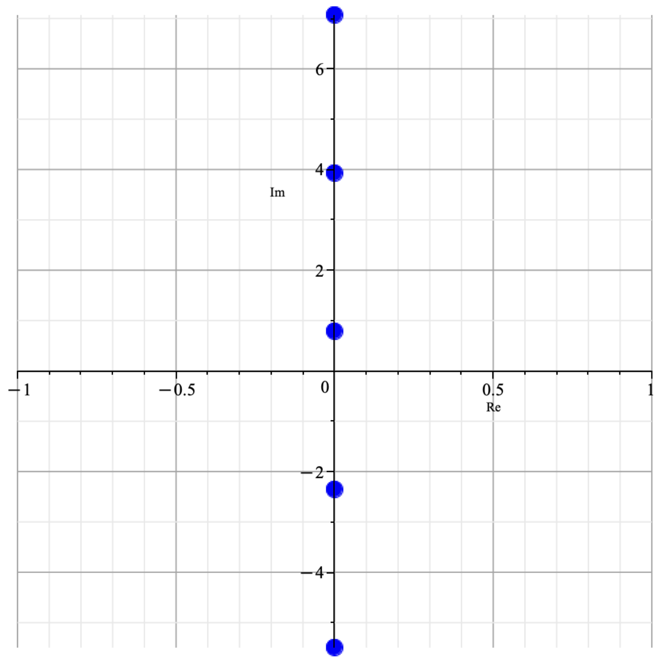
Desuden er der ingen andre løsninger, hvilket vi lige har vist i 1.2.b; ved at antage vi har en løsning $z = a + ib$ med $a, b \in \mathbb{R}$, og så anvende resultatet fra 1.2.b på denne opgave fås nemlig at

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} \stackrel{?}{=} e^0 \cdot e^{i\pi/4} = e^{0+i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

netop når $e^a = e^0 \iff a = 1$ og $b \equiv \pi/4 \pmod{2\pi}$, som netop karakteriserer de løsninger vi allerede har identificeret. □

Nu tegnes fem af disse løsninger i Maple vha. nedenstående kommando.

```
with(plots);
z := Pi/4*I;
display(
    complexplot(
        [seq(z + n*Pi*I, n = -2 .. 2)],
        style = point,
        symbol = solidcircle,
        colour = blue,
        symbolsize = 20,
        gridlines
    ),
    labels = ["Re", "Im"]
);
unassign('z');
```



Fem løsninger til $e^z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ plottet i det komplekse talplan.

§1.2.d

For hvilke værdier af tallet $w \in \mathbb{C}$ har ligningen $e^z = w$ en løsning? Er løsningen i disse sådanne tilfælde entydig?

Samtlige $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, og den er aldrig entydig.

Bevis. Først vises at 0 ikke er en potens af e: Antag for modstrid $e^z = e^{a+ib} = 0$ med $a, b \in \mathbb{R}$. Da er

$$0 = |0| = |e^z| = |e^{a+ib}| = |e^a \cdot e^{ib}| = |e^a||e^{ib}| = |e^a| > 0$$

hvilket er en modstrid. Sidste ulighed følger af at $a \in \mathbb{R} \implies e^a \in \mathbb{R}^+$.

Nu skal vi blot vise, at samtlige $w \neq 0$ kan skrives på den ønskede form. Lad derfor $w = re^{i\theta}$ være givet på polær form, hvor $r = |w| > 0$ er modulus af w og θ er et argument af w. Vælg $z \coloneqq \ln(r) + i\theta$. Da er

$$e^z = e^{\ln(r)+i\theta} = e^{\ln(r)} \cdot e^{i\theta} = re^{i\theta} = w$$

som ønsket.

Skrivemåden er ikke entydig da vi kan vælge et andet argument som afviger fra θ med en multipel af 2π. $\square$