MatIntro aflevering 2

Albert B. Carlson

24. september 2024

"Mathematics consists in proving the most obvious thing
in the least obvious way." — George Pólya

§2.1

Betragt funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x^n \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

hvor $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

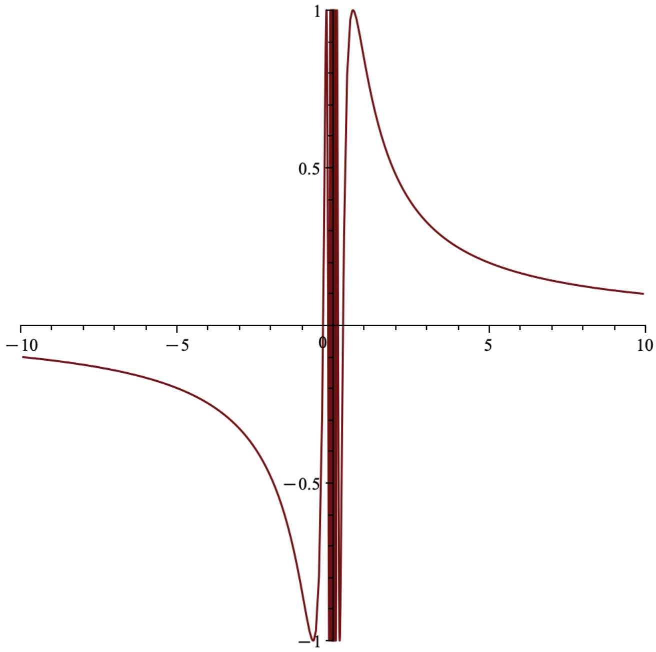
§2.1.a

Betragt først tilfældet $n = 0$. Tegn ved hjælp af Maple grafen for f i de tre forskellige intervaller: $[-10, 10]$, $[-1, 1]$ og $[-1/10, 1/10]$.

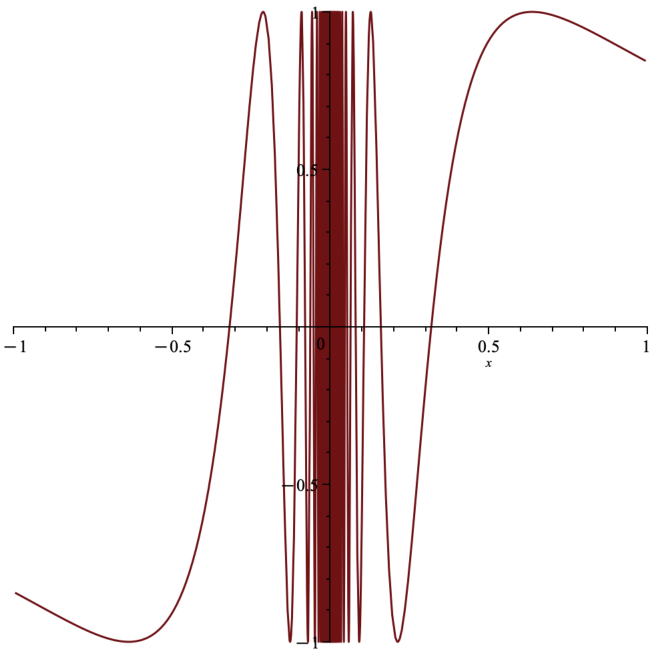
Nedenstående kommandoer anvendes til at tegne graferne i Maple.

```
f := x -> sin(1/x);
with(plots);
plot(f(x), x = -10 .. 10);
plot(f(x), x = -1 .. 1);
plot(f(x), x = -0.1 .. 0.1);
```

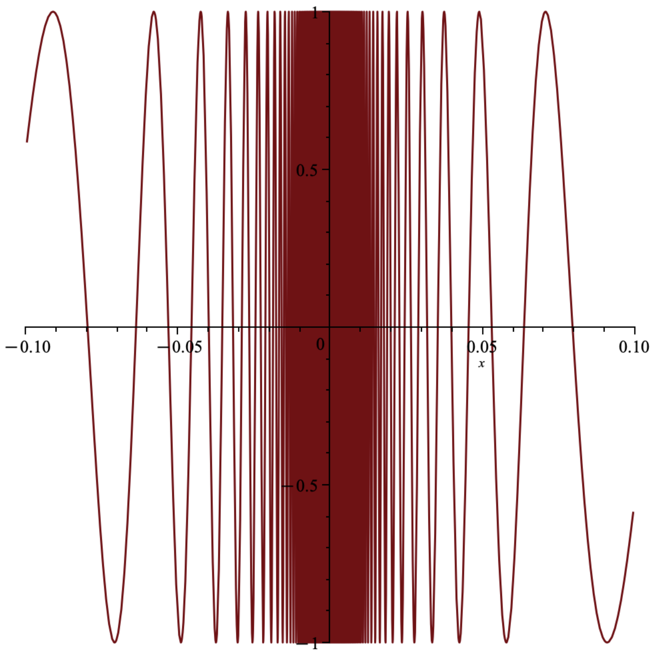
> **Bemærkning.** Vi har ignoreret at $f(x) = 0$ for $x = 0$, da det alligevel ikke ændrer på grafernes udseende.



f plottet på intervallet $[-10, 10]$.



f plottet på intervallet $[-1, 1]$.



f plottet på intervallet $[-1/10, 1/10]$.

§2.1.b

Lad igen $n = 0$, og betragt et vilkårligt reelt tal $\delta > 0$. Vis, at uanset hvor tæt δ er på 0, findes der altid både et $x_1 \in (0, \delta)$, så $f(x_1) = 1$ og et $x_2 \in (0, \delta)$, så $f(x_2) = -1$. Brug dette til at afgøre, hvorvidt f er kontinuert. Er f differentiabel?

Bevis. Lad $\delta > 0$ være givet. Vælg $k \in \mathbb{N}$ tilstrækkelig stor sådan at $k > \frac{2+\delta\pi}{4\delta\pi} > \frac{2-\delta\pi}{4\delta\pi}$. Dette er altid muligt, da $\mathbb{N}$ er ubegrænset opadtil, hvorimod $\frac{2\pm\delta\pi}{4\delta\pi}$ er givne konstanter når δ er givet. Sæt nu $x_1 := \frac{2}{(4k+1)\pi}$ og $x_2 := \frac{2}{(4k-1)\pi}$ og bemærk, at

$$0 < x_1 = \frac{2}{(4k+1)\pi} < \frac{2}{(4\frac{2-\delta\pi}{4\delta\pi} + 1)\pi} = \frac{2}{(\frac{2}{\delta\pi} - \frac{\delta\pi}{\delta\pi} + 1)\pi} = \frac{2}{\frac{2}{\delta}} = \delta.$$

og

$$0 < x_2 = \frac{2}{(4k-1)\pi} < \frac{2}{(4\frac{2+\delta\pi}{4\delta\pi} - 1)\pi} = \frac{2}{(\frac{2}{\delta\pi} + \frac{\delta\pi}{\delta\pi} - 1)\pi} = \frac{2}{\frac{2}{\delta}} = \delta.$$

dvs. $x_1, x_2 \in (0, \delta)$ som krævet. Derved haves

$$f(x_1) = \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) = \sin\left(\frac{1}{\frac{2}{(4k+1)\pi}}\right) = \sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

og

$$f(x_2) = \sin\left(\frac{1}{x_2}\right) = \sin\left(\frac{1}{\frac{2}{(4k-1)\pi}}\right) = \sin\left(\frac{(4k-1)\pi}{2}\right) = \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

som ønsket, hvor næstsidste lighed følger af at sin er periodisk med periode 2π. □

Påstand — Af dette konkluderes at f ikke er kontinuert i $x = 0$.

Bevis. Antag nemlig for modstrid, at $g := \lim_{x\to 0} f(x)$ eksisterer. Dvs. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ sådan at $0 < |x - 0| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon$.

Men fx $\varepsilon = 1$ er et modeksempel, da vi i så fald *ikke* kan vælge et $\delta > 0$ så $0 < |x - 0| = |x| < \delta$ medfører at $|f(x) - g| < \varepsilon$. Dette har vi nemlig lige vist; uanset hvor lille vi måtte vælge δ er der forskellige $|x_1|, |x_2| < \delta$ så $|f(x_1) - g| = |1 - g|$ og $|f(x_2) - g| = |-1 - g|$, men

$$|1 - g| + |-1 - g| = |1 - g| + |1 + g| \geqslant |1 - g + 1 + g| = |2| = 2$$

pga. trekantsuligheden. Når to tal har sum $\geqslant 2$ medfører det at mindst en af dem ikke er mindre end $\varepsilon = 1$. Dvs. enten er $|f(x_1) - g|$ eller $|f(x_2) - g|$ *ikke* mindre end ε, i modstrid med antagelsen. □

Påstand — Desuden er f heller ej differentiabel.

Bevis. Da alle differentiable funktioner er kontinuerte (TL 6.1.9), og f ikke er kontinuert i $x = 0$, er f heller ej differentiabel i $x = 0$. □

§2.1.c

Betragt nu tilfældet $n = 1$. Forklar, hvordan det følger af TL, 6.1.4 og 6.1.5 at f er differentiabel i ethvert $x \neq 0$, og bestem den afledte funktion.

For god ordens skyld inkluderes de nævnte resultater her.

6.1.4 Derivasjonsregler Anta at funksjonene f og g er deriverbare i punktet a, og at c er en konstant. Da er også funksjonene cf, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ og (forutsatt at $g(a) \neq 0$) f/g deriverbare i a. Deres deriverte er gitt ved:

(i) $(cf)'(a) = c \cdot f'(a)$

(ii) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(iii) $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$

(iv) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

(v) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

6.1.5 Kjerneregelen Anta at g er deriverbar i a og at f er deriverbar i $g(a)$. Da er den sammensatte funksjonen $h(x) = f[g(x)]$ deriverbar i a, og

$$h'(a) = f'[g(a)]g'(a).$$

I vores tilfælde er

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Vi vil vise, at f er differentiabel i alle $x \neq 0$, så lad $x \neq 0$, dvs. $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Det er klart, at $x \mapsto x$ er differentiabel i x. Antag for nu, at $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ også er differentiabel i x. Da er f, som er produktet af disse to, også differentiabel i x jf. 6.1.4 (iv).

Vend nu tilbage til højre led, altså funktionen $h(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Definer $\phi(x) := \sin x$ og $\gamma(x) := \frac{1}{x}$ hvorved $h(x) = \phi(\gamma(x))$. Det er kendt, at både ϕ og γ er differentiable i alle $x \neq 0$. Derfor kan 6.1.5 anvendes, og det fås, at

$$h'(x) = \phi'(\gamma(x))\gamma'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

specielt at $h(x)$ er differentiabel som ønsket. □

Samlet er

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x \cdot h(x))' \\ &= x \cdot h'(x) + x' \cdot h(x) \\ &= x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

jf. 6.1.4 (iv).

§2.1.d

Lad igen $n = 1$. Er f kontinuert i $x = 0$? Er f differentiabel i $x = 0$?

Påstand — Ja, f er kontinuert i $x = 0$.

Bevis. Vi viser, at $0 = f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$. Det er klart at $f(0) = 0$ ved indsættelse. Nu viser vi, at $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Sæt $\delta = \varepsilon$. Antag at $0 < |x - 0| < \delta$ (specielt $x \neq 0$). Da er

$$|f(x) - 0| = \left|x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \delta \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \overset{(1)}{\leqslant} \delta = \varepsilon$$

hvor uligheden ved (1) følger af at sin's billede er begrænset til $[-1, 1]$. □

Påstand — Nej, f er ikke differentiabel i $x = 0$.

Bevis. Vi skal undersøge om grænseværdien

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

eksisterer. Da $0 \neq 0 + \Delta x$ er $f(0+\Delta x) = \Delta x \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)$. Desuden er $f(0) = 0$ ved indsættelse. Derfor er

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) = \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

men vi viste i 2.1.b at højre grænseværdi ikke eksisterer. Derfor er f ikke differentiabel i $x = 0$. □

§2.1.e

Til slut antages at $n > 1$. Er f kontinuert i $x = 0$? Er f differentiabel i $x = 0$?

Påstand — Ja, f er kontinuert i $x = 0$.

Bevis. Vi viser, at $0 = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Det er klart at $f(0) = 0$ ved indsættelse. Nu viser vi, at $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Sæt $\delta = \sqrt[n]{\varepsilon}$. Antag at $0 < |x - 0| < \delta$ (specielt $x \neq 0$) hvorved $|x^n| = |x|^n < \delta^n = \varepsilon$. Da er

$$|f(x) - 0| = \left|x^n \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x^n| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \varepsilon \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

hvor sidste ulighed følger af at sin's billede er begrænset til $[-1, 1]$. □

Påstand — Ja, f er differentiabel i $x = 0$, og $f'(0) = 0$.

Bevis. Vi viser at

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0.$$

Lav samme omskrivning som i 2.1.d, altså

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} x^{n-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Vi ønsker altså blot at vise, at

$$\lim_{x \to 0} x^{n-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Sæt $\delta = \sqrt[n-1]{\varepsilon}$. Denne værdi eksisterer netop da $n > 1$. Antag $0 < |x - 0| < \delta$ (specielt $x \neq 0$) hvorved $|x^{n-1}| = |x|^{n-1} < \delta^{n-1} = \varepsilon$. Da er

$$|f(x) - 0| = \left|x^{n-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x^{n-1}| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \varepsilon \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

hvor sidste ulighed følger af at sin's billede er begrænset til $[-1, 1]$. □

§2.2

Betragt funktionen

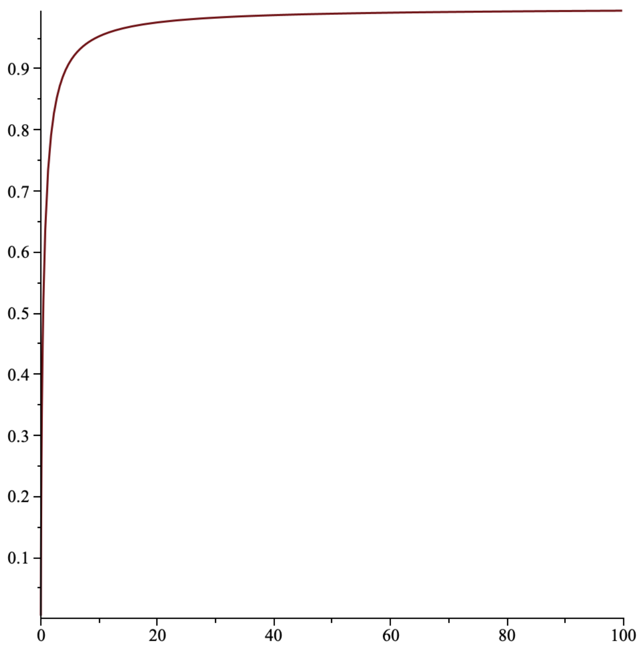
$$f(x) = x\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x+1)\right) \qquad x > 0.$$

§2.2.a

Tegn ved hjælp af Maple grafen for $0 < x < 100$. Hvilken værdi ville du gætte på at grænseværdien $\lim_{x\to\infty} f(x)$ har, hvis du alene skulle bedømme ud fra denne graf?

Nedenstående kommandoer anvendes til at tegne grafen i Maple.

```
g := x -> x*(ln(1/x) + ln(x + 1));
plot(g(x), x = 0 .. 100);
```



f plottet på intervallet $[0, 100]$.

Formodning. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

§2.2.b

Bestem $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Påstand — $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Bevis. Vi omskriver

$$f(x) = x\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x+1)\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x+1)}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

og observerer, at l'Hôpitals regel kan anvendes på udtrykket til højre da både tæller og nævner går mod 0 når $x \to \infty$. Derfor er

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln(x+1) - \ln(x)\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \qquad (2) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \cdot (-x^2) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-(x+1)}{x(x+1)}\right) \cdot (-x^2) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(x+1)} \cdot x^2 \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \\
&= 1 \qquad (3)
\end{aligned}$$

hvor vi ved (2) brugte kædereglen (TL 6.1.5) til at udlede, at

$$(\ln(x+1))' = \ln'(x+1)\,(x+1)' = \frac{1}{x+1},$$

og ligheden ved (3) er kendt fra øvelserne og er let at eftervise. □

Dette beviser altså formodningen.

§2.2.c

> Beregn i Maple $f(10^n)$ for $n = 1, \ldots, 10$, og angiv resultaterne som approksimerede decimaltal ved hjælp af kommandoen `evalf`. Vær opmærksom på, at Maple ikke uden videre regner rigtigt her, og det er meningen at du skal få et "forkert" resultat.

Nedenstående tabel viser de resultater Maple gav ved at følge opgavens instruktioner.

n	$f(10^n)$
1	0.95310180
2	0.9950331
3	0.999500
4	0.99995
5	1.000
6	1.00
7	1.0
8	1.
9	0.
10	0.

§2.2.d

> Kan du ved hjælp af kommandoen `Digits` få beregningerne i 2.2.c til at stemme overens med dit resultat i 2.2.b? Brug eventuelt hjælpefunktionen i Maple til at få et indtryk af, hvad kommandoen gør. Giv en lille kommentar - bør en matematiker uden videre stole på en computer?

Ja, ved at ændre konstanten `Digits` fra 10 til 15 ændres tabellen til følgende. Præcisionen er som det fremgår øget med 5 cifre.

n	$f(10^n)$
1	0.9531017980432
2	0.995033085316
3	0.99950033307
4	0.9999500032
5	0.99999500
6	0.9999995
7	0.999999
8	1.00000
9	1.0000
10	1.000

Som det fremgår af Maples dokumentation til `Digits` kontrollerer denne variabel antallet af cifre Maple anvender til at lave beregninger med de såkaldte "floats." Det er vigtigt at være opmærksom på, at en computer ikke kan repræsentere vilkårlige reelle tal på effektiv vis. Derfor anvendes typisk "floating point" tal, da disse som regel har rimelig præcision til de fleste opgaver og samtidig ikke fylder særligt meget. Desværre går de dog på kompromis med præcision, hvilket er vigtigt for matematikere at kende til, så man ikke så let bliver narret af en ejendommelighed som demonstreret i 2.2.c. Mere generelt er det vigtigt at have for øje, at computere ikke uden videre "taler sandt."