MatIntro aflevering 3

Albert B. Carlson

8. oktober 2024

> "Among all of the mathematical disciplines the theory of differential equations is the most important... It furnishes the explanation of all those elementary manifestations of nature which involve time."
>
> — Sophus Lie

§3.1

Om to funktioner $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oplyses, at de opfylder det *koblede differentialligningssystem* af første orden:

$$f'(x) = -g(x)$$
$$g'(x) = f(x)$$

Desuden oplyses begyndelsesbetingelserne $f(0) = 1$ og $g(0) = 0$ (at der findes sådanne funktioner, og at de givne oplysninger fastlægger dem entydigt, kan tages for givet i denne opgave).

§3.1.a

> Udled af det koblede differentiallingningssytem to lineære differentialligninger af anden orden, en for f og en for g.

Observer, at

$$f''(x) = (f'(x))' = (-g(x))' = -g'(x) = -f(x)$$

og at

$$g''(x) = (g'(x))' = (f(x))' = f'(x) = -g(x).$$

Dette er de to ønskede differentialligninger af anden orden, der ikke er koblede.

§3.1.b

> Løs begge ligninger udledt i 3.1.a med de oplyste begyndelsesbetingelser, og vis, at der gælder
> $$f(x)^2 + g(x)^2 = 1.$$

Vi ønsker at løse den homogene, lineære, andenordens differentialligning

$$y'' + y = 0$$

Da denne er den, der svarer til både f og g's andenordens differentialligninger udledt i 3.1.a. Vi håber på, at $y(x) = e^{kx}$ måske er en løsning for et eller andet $k \in \mathbb{C}$, med den bagtanke at vi efter at have fundet eventuelle løsninger kan udnytte et entydighedsresultat. I så fald skal

$$\begin{aligned}(e^{kx})'' + e^{kx} = 0 &\iff r^2 e^{kx} + e^{kx} = 0 \\ &\iff (r^2+1)e^{kx} = 0 \\ &\iff r^2 + 1 = 0 \qquad (1) \\ &\iff r = \pm i.\end{aligned}$$

Biimplikationen ved (1) skyldes, at den komplekse eksponentialfunktion ikke kan antage værdien 0, hvilket vi viste i opgave 1.2.d i første aflevering. Derfor, da $\mathbb{C}$ er et integritetsområde, gælder nulreglen, så den anden faktor $r^2 + 1$ må altså være 0.

Det indses nu, at dette faktisk oversætter til en løsning; ved at anvende definitionen af det komplekse eksponentiale (TL 3.3.1) fås, at

$$e^{\pm ix} = e^{0 \pm ix} = e^0(\cos(\pm 1x) + i\sin(\pm 1x)) = \cos(\pm x) + i\sin(\pm x) \overset{(2)}{=} \cos x \pm i \sin x.$$

Bemærk, at ligheden ved (2) følger af, at cos er lige mens sin er ulige.

Dette resultat skal tolkes som 2 løsninger; en med + og en med −. Da vi ikke er interesseret i komplekse løsninger til differentialligningssystemet (det oplyses i opgaven, at $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), kan vi derfor betragte en linearkombination af disse to løsninger der eliminerer det imaginære led. Pr. TL 10.5.1 vil en sådan linearkombination stadig være en løsning. Betragt derfor linearkombinationen

$$\begin{aligned}&(a+ib)(\cos x + i\sin x) + (c+id)(\cos x - i \sin x) \\ &= ((a+c)\cos x - (b-d)\sin x) + \underbrace{i((b+d)\cos x + (a-c)\sin x)}_{\text{netop 0 når } b=-d \text{ og } a=c} \qquad (3)\end{aligned}$$

Ved valg af to komplekskonjugerede koefficienter til de to løsningerns linearkombination fås altså, ved at indsætte $C_1 \coloneqq 2a = 2c$ og $C_2 \coloneqq -2b = 2d$ i (3), at den reelle funktion

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

er en løsning til $y'' + y = 0$ for ethvert valg af konstanter $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, hvilket let kan verificeres ved indsættelse. Dette er derfor muligheder for f og g. Skriv da

$$\begin{aligned}f(x) &= F_1 \cos x + F_2 \sin x \\ g(x) &= G_1 \cos x + G_2 \sin x\end{aligned}$$

for reelle tal $F_1, F_2, G_1, G_2 \in \mathbb{R}$. Ved nu at udnytte begyndelsesbetingelserne fås at $1 = f(0) = F_1 \cos 0 + F_2 \sin 0 = F_1$ og at $0 = g(0) = G_1 \cos 0 + G_2 \sin 0 = G_1$, altså kan vi skrive

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos x + F_2 \sin x \\ g(x) &= G_2 \sin x\end{aligned}$$

Til sidst kan vi udnytte koblingsligningen $g'(x) = f(x)$ til at konkludere, at

$$\begin{aligned}\cos x + F_2 \sin x &= f(x) \\ &= g'(x)\end{aligned}$$

$$= (G_2 \sin x)'$$
$$= G_2 \cos x$$

for alle $x \in \mathbb{R}$, hvorfra det let udledes, at $F_2 = 0$ og $G_2 = 1$. Dvs.

$$f(x) = \cos x$$
$$g(x) = \sin x$$

som let ved indsættelse bekræftes faktisk er løsninger til det koblede differentialligningssystem.

Det følger nu af TL 10.5.13 (indsat nedenfor), at denne løsning er unik.

10.5.13 Setning Anta at den karakteristiske ligning til

$$y'' + py' + qy = 0$$

har to komplekse røtter r_1 og r_2. La c, d og e være fritt valgte, reelle tall. Da finnes det nøyaktig én løsning av differensialligningen slik at

$$y(c) = d \qquad \text{og} \qquad y'(c) = e.$$

Da vi har fundet denne ene løsning, sikrer dette entydighedsresultat altså, at den er unik.

Herfra er det velkendt, at

$$f(x)^2 + g(x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Vi betragter nu det samme koblede system med en lille modifikation:

$$f'(x) = g(x)$$
$$g'(x) = f(x)$$

Bemærk, at der ikke længere indgår et minustegn i første ligning.

§3.1.c

Udled heraf på samme måde som ovenfor to lineære andenordensligninger, og løs dem med de samme begyndelsesbetingelser. Vis, at der om disse løsninger gælder

$$f(x)^2 - g(x)^2 = 1.$$

(For detaljer i argumentationen henvises til forrige opgave.)

Observer analogt tidligere, at

$$f''(x) = (f'(x))' = (g(x))' = g'(x) = f(x)$$

og at
$$g''(x) = (g'(x))' = (f(x))' = f'(x) = g(x)$$
så vi er interesserede i at løse den homogene andenordens differentialligning
$$y'' - y = 0.$$
Ligesom før gættes på $y(x) = e^{kx}$, hvorved der så skal gælde
$$(e^{kx})'' - e^{kx} = 0 \iff k = \pm 1.$$
Dette er heldigvis mindre komplekst end før (badum tss). Samtlige linearkombinationer af e^x og e^{-x} er altså løsninger til de to andenordens differentialligninger, hvilket let kan bekræftes, så skriv som før
$$\begin{aligned} f(x) &= F_1 e^x + F_2 e^{-x} \\ g(x) &= G_1 e^x + G_2 e^{-x}. \end{aligned}$$
Nu ses, at $1 = f(0) = F_1 + F_2$ og $0 = g(0) = G_1 + G_2$, så skriv
$$\begin{aligned} f(x) &= F e^x + (1 - F) e^{-x} \\ g(x) &= G e^x - G e^{-x}. \end{aligned}$$
Til sidst udnyttes koblingsligningen $f'(x) = g(x)$ til at se, at
$$\begin{aligned} F e^x + (F - 1) e^{-x} &= f'(x) \\ &= g(x) \\ &= G e^x - G e^{-x} \end{aligned}$$
for alle $x \in \mathbb{R}$, hvorfra det let udledes, at $F = G = 1/2$. Dvs.
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x) \\ g(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x). \end{aligned}$$
Entydighedsresultatet 10.5.13 sikrer, at dette er eneste løsning til ligningssystemet.

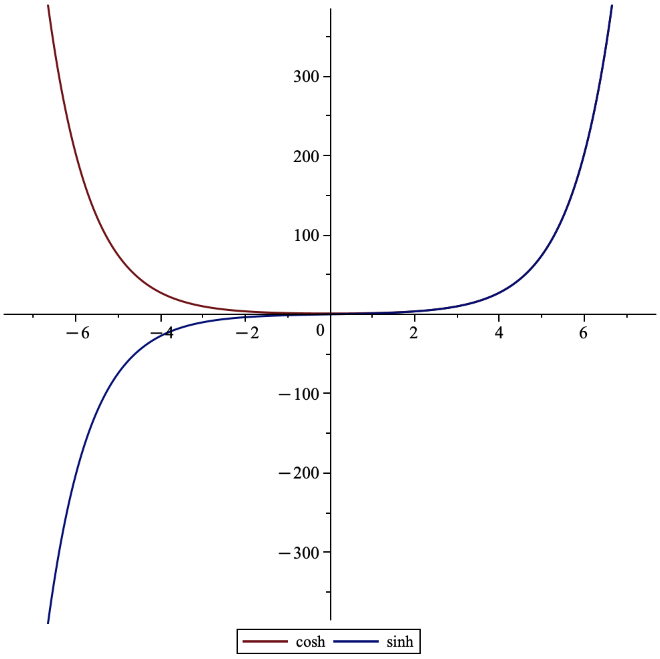
Identiteten $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$ verificeres nu let:
$$\begin{aligned} f(x)^2 - g(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^{x-x}}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^{x-x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$
som ønsket. Dette fuldfører opgaven.

§3.1.d

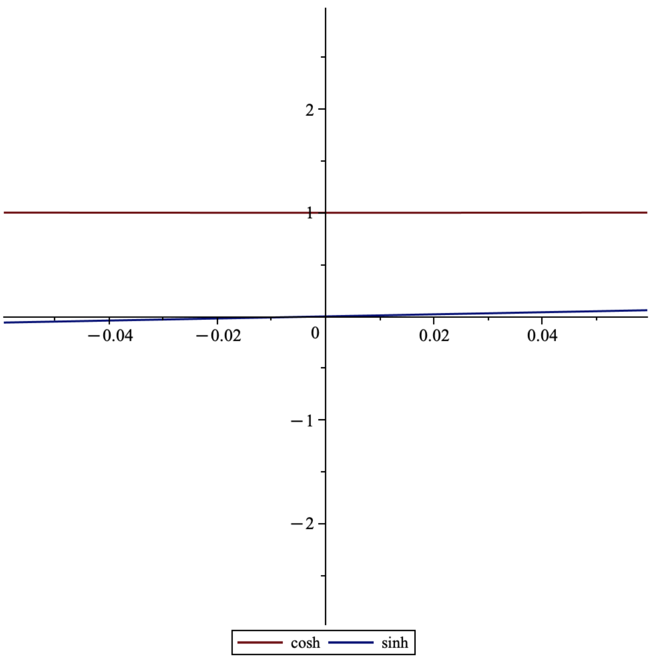
Tegn ved hjælp af Maple graferne for cosh og sinh (sørg for at det fremgår, hvilken graf der hører til hvilken funktion). Bekræft også ved hjælp af Maple, at funktionerne faktisk opfylder det koblede differentialligningssystem og begyndelsesbetingelserne.

Nedenstående kommando anvendes til at tegne graferne i Maple.

```
plot([cosh, sinh], legend = ["cosh", "sinh"]);
```



cosh og sinh plottet.



cosh og sinh visualiseret tættere på origo.

Det ses på nederste figur, at funktionerne opfylder begyndelsesbetingelserne, idet det aflæses, at $\cosh(0) = 1$ og $\sinh(0) = 0$. For god ordens skyld bekræfter følgende Maple-kommandoer også det forventede, idet de giver hhv. 1 og 0.

```
cosh(0)
sinh(0)
```

Nu tjekkes ligeledes vha. nedenstående Maple-kommandoer, at vores originale koblede differentialligningssystem er opfyldt af disse to funktioner.

```
sinh'(x)
cosh'(x)
```

hvor Maple svarer, at $\sinh'(x) = \cosh(x)$ og $\cosh'(x) = \sinh(x)$, hvilket netop viser, at de opfylder opgavens differentialligningssystem. Dette fuldfører altså opgaven.

§3.2

Vi betragter i det følgende den naturlige logaritmefunktion, $\ln(x)$, og eksponentialfunktionen, e^x. Vi minder om at logaritmefunktionen har definitionsmængde $(0, \infty)$, og dens værdimængde er $\mathbb{R}$. Omvendt har eksponentialfunktionen definitionsmængde $\mathbb{R}$, og dens værdimængde er $(0, \infty)$, hvilket kan tages for givet i det følgende.

§3.2.a

Vis ved hjælp af Middelværdisætningen, at der for ethver $x > 1$ findes et $c \in (1, x)$, sådan at

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{1}{c}.$$

Bevis. For god ordens skyld inkluderes Middelværdisætningens formulering nedenfor.

6.2.3 Middelverdisetningen Anta at funksjonen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og at den er deriverbar i alle indre punkter $x \in (a,b)$. Da finnes det et punkt $c \in (a,b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Vælg et vilkårligt $x > 1$. Definer funktionen $\ln_x : [1, x] \to \mathbb{R}$ som blot er givet ved $\ln_x(c) = \ln(c)$ for alle $c \in [1, x]$. Denne er kontinuert på intervallet $[1, x]$, da ln er kontinuert generelt. Desuden er den differentiabel i alle $c \in (1, x)$, igen da ln generelt er differentiabel, og $\ln_x'(c) = \ln'(c) = 1/c$ for alle $c \in (1, x)$.

Nu følger resultatet umiddelbart af sætningen; vi kan vælge et $c \in (1, x)$ sådan at

$$\ln_x'(c) \overset{(4)}{=} \frac{\ln_x(x) - \ln_x(1)}{x-1} = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = \frac{\ln(x)}{x-1}$$

hvor ligheden ved (4) følger af Middelværdisætningen. Ydermere er $\ln_x'(c) = \ln'(c) = 1/c$ så

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln(x)}{x-1}$$

som ønsket. □

§3.2.b

Vis, at der for alle $x > 0$ gælder

$$\ln(x) \leqslant x - 1.$$

Bevis. Vi har lige i 3.2.a vist, at der for alle $x > 1$ findes et $c > 1$ sådan at

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

Da $c > 1$ er $1/c < 1$ så

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x)}{x-1} &= \frac{1}{c} < 1 \\ \implies \ln(x) &< x - 1 \qquad (5) \\ \implies \ln(x) &\leqslant x - 1 \end{aligned}$$

hvor implikationen ved (5) følger af blot at gange $x - 1 > 0$ på venstre og højre side.

For $x = 1$ tjekkes manuelt, at $0 = \ln(1) \leqslant 1 - 1 = 0$.

Nu behandler vi til sidst casen $0 < x < 1$. Dog virker samme argument som før med en lille modifikation: vælg et vilkårligt $x \in (0, 1)$ og definer $\ln_x : [x, 1] \to \mathbb{R}$ ligesom tidligere. Ligesom før er $\ln_x$ kontinuert, differentiabel i $(x, 1)$ og dens afledte er $\ln_x'(c) = 1/c$ for alle $c \in (x, 1)$. Derfor siger Middelværdisætningen, at der findes et $c \in (x, 1)$ (specielt $c < 1$ så $1/c > 1$ sådan at

$$1 < \frac{1}{c} = \ln_x'(x) = \frac{\ln_x(1) - \ln_x(x)}{1-x} = \frac{\ln(1) - \ln(x)}{1-x} = \frac{-\ln(x)}{1-x} = \frac{\ln(x)}{x-1} \qquad (6)$$

hvorved

$$x - 1 > \ln(x) \implies x - 1 \geqslant \ln(x).$$

som ønsket, ved at gange $x - 1 < 0$ på højre og venstre side af (6) og vende ulighedens retning.

Dette fuldfører beviset. □

§3.2.c

Vis ved hjælp af Middelværdisætningen, at eksponentialfunktionen er strengt voksende på $\mathbb{R}$, dvs. at der for alle $x, y \in \mathbb{R}$ gælder

$$x < y \implies e^x < e^y.$$

Bevis. Antag, at $x < y$, og skriv $e^x = \exp(x)$. Vi ved, at exp er differentiabel og dens afledte er sig selv, altså $\exp'(x) = \exp(x)$. Derfor kan vi anvende Middelværdisætningen, som giver os et $c \in (a, b)$, så

$$\frac{\exp(y) - \exp(x)}{y - x} = \exp'(c) = \exp(c) > 0$$

eftersom det nævnes i opgaven, at vi må tage for givet, at værdimængden af exp er $(0, \infty)$, hvorved $\exp(c) > 0$. Ergo kan vi konkludere, at

$$\begin{aligned} \frac{\exp(y) - \exp(x)}{y - x} > 0 &\implies \exp(y) - \exp(x) > 0 \\ &\implies \exp(y) > \exp(x) \\ &\implies e^x < e^y \end{aligned}$$

ved at gange med $y - x > 0$ på begge sider. Dette var netop det ønskede. □

§3.2.d

Vis ved hjælp af Middelværdisætningen, at der for alle $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$e^x \geqslant 1 + x.$$

Bevis. Vi inddeler i tilfælde. Først for $x = 0$ er det klart, at $e^0 = 1 \geqslant 1 = 1 + 0$.

Nu viser vi resultatet for $x > 0$. Lad derfor $x > 0$ være givet, og skriv $e^x = \exp(x)$ præcis som før, hvor $\exp'(x) = \exp(x)$. Da giver Middelværdisætningen for eksponentialfunktionen på intervallet $(0, x)$ os et $c \in (0, x)$ så

$$\exp(c) = \exp'(c) = \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \frac{\exp(x) - 1}{x}$$

så ved at gange med x på venstre og højre side fås

$$x \cdot \exp(c) = \exp(x) - 1.$$

Da $c > 0$ er $\exp(c) > 1$, så da $x > 0$ er

$$x \leqslant x \cdot \exp(c) = \exp(x) - 1 \implies x + 1 \leqslant \exp(x),$$

hvilket fuldfører dette scenarie.

Nu behandler vi i stedet scenariet $x < 0$. Ved Middelværdisætningen fås et $c \in (x, 0)$ så

$$\exp(c) = \exp'(c) = \frac{\exp(0) - \exp(x)}{0 - x} = \frac{1 - \exp(x)}{-x}$$

så ved nu at gange med $-x$ på venstre og højre side fås ved tilsvarende argument som før, at

$$\begin{aligned} -x \cdot \exp(c) = 1 - \exp(x) &\implies x \cdot \exp(c) = -(1 - \exp(x)) \\ &\implies x \cdot \exp(c) = \exp(x) - 1 \\ &\implies x \leqslant x \cdot \exp(c) = \exp(x) - 1 \qquad (7) \\ &\implies x + 1 \leqslant \exp(x) \end{aligned}$$

hvor introduktionen af uligheden ved (7) nu følger af at både $x < 0$ og $0 < \exp(c) < 1$. Dette færdiggør beviset. $\square$