MatIntro aflevering 4

Albert B. Carlson

22. oktober 2024

"The beauty of mathematics only shows itself to more patient followers."

— Maryam Mirzakhani

§4.1

I denne opgave vil vi vise, at

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$

Vi tager udgangspunkt i funktionen $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$.

§4.1.a

Find Taylor-polynomierne, $T_1 f$ og $T_2 f$ af første og anden orden med udviklingspunkt $a = 0$. Tegn ved hjælp af Maple graferne for f, $T_1 f$ og $T_2 f$ i samme koordinatsystem med tydelig angivelse af, hvilken graf der hører til hvilken funktion.

Påstand — $T_1 f(x) = x$.

Bevis. Eftersom

$$(\ln(1+x))' = \ln'(1+x)(1+x)' = \frac{1}{1+x}$$

ved brug af kædereglen, haves

$$\begin{aligned} T_1 f(x) &= \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) \\ &= \frac{\ln(1+0)}{1} + \frac{\frac{1}{1+0}}{1}\cdot x \\ &= 0 + x \\ &= x \end{aligned}$$

□

Påstand — $T_2 f(x) = -\frac{1}{2}\cdot x^2 + x$.

Bevis. Eftersom

$$(\ln(1+x))'' = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}(1+x)' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

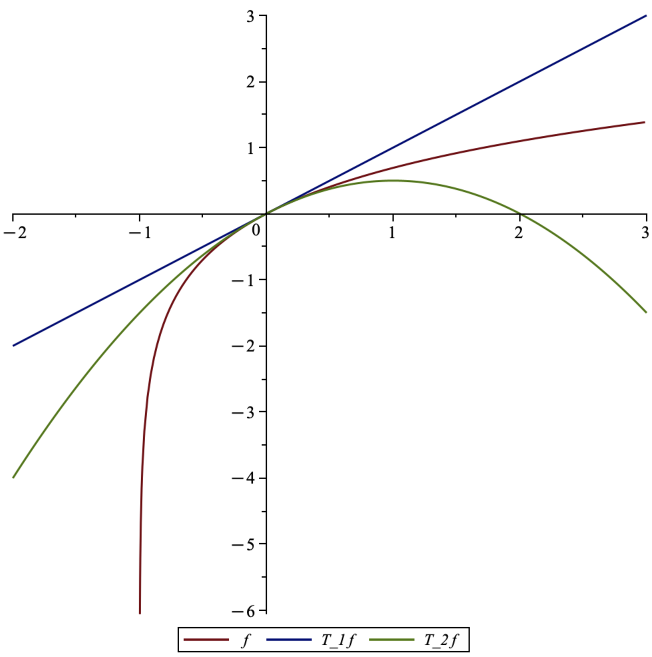
ved brug af kædereglen igen, haves

$$\begin{aligned} T_2 f(x) &= \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 \\ &= 0 + x + \frac{-\frac{1}{(1+0)^2}}{2} \cdot x^2 \\ &= 0 + x + \frac{-1}{2} \cdot x^2 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot x^2 + x. \end{aligned}$$

□

Nu tegner vi graferne i Maple ved brug af nedenstående kommandoer.

```
f := x -> ln(x + 1);
T_1f := x -> x;
T_2f := x -> -1/2*x^2 + x;
plot([f, T_1f, T_2f], -2 .. 3, legend = [f, T_1 f, T_2 f]);
```



§4.1.b

Vis, at restleddet $R_1 f(x)$ er givet ved

$$R_1 f(x) = -\frac{x^2}{2(1+c)^2}$$

hvor c er et tal mellem 0 og x.

Bevis. Vi viser resultatet ved brug af Lagranges retsledsformel. Denne inkluderes for god ordens skyld nedenfor.

11.2.3 Lagranges restledsformel Anta at f og dens $n+1$ første deriverte er kontinuerlige på intervallet $[a, x]$. Da er

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

for et tall c i den åpne intervallet mellom a og x.

For $x = 0$ er opgavens udsagn klart sandt ved $c = 0$, hvis vi definerer "mellem" til at være inklusiv endepunkterne.

Antag nu at $x \neq 0$. Ved indsættelse af $a = 0$, da dette er udviklingspunktet, og $n = 1$, da vi er interesset i $R_1 f(x)$, i formlen, fås et c mellem 0 og x, sådan at

$$R_1 f(x) = \frac{f''(c)}{(1+1)!}(x-0)^{1+1} = -\frac{1}{2(c+1)^2} \cdot x^2 = -\frac{x^2}{2(1+c)^2}$$

som ønsket. $\square$

§4.1.c

Lad n være et vilkårligt naturligt tal. Vis, at der for $x > -n$ gælder

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

Bevis. Det udledes, at

$$\begin{aligned} x > -n &\implies \frac{x}{n} > -1 \\ &\implies 1 + \frac{x}{n} > 0 \end{aligned}$$

så $1 + \frac{x}{n}$ er positiv, hvorved vi kan tage dets logaritme. Ergo er

$$\begin{aligned} \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) &= e^{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)} \\ &= e^{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) n} \\ &= \left(e^{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

som ønsket. $\square$

§4.1.d

Vis på baggrund af de foreløbige resultater, at når $x > -n$, gælder

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(x - \frac{x^2}{2n(1+c)^2}\right)$$

hvor c i dette tilfælde er et tal mellem 0 og x/n.

Bevis. Ved erstatning af x med x/n i resultatet vist i 4.1.b fås, at vi kan skrive

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} = -\frac{x^2}{2n^2(1+c)^2}$$
$$\implies \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2(1+c)^2}$$

for et c mellem 0 og x/n.

Ved indsættelse af dette i resultatet vist i 4.1.c fås, at

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2(1+c)^2}\right)\right) \\ &= \exp\left(x - \frac{x^2}{2n(1+c)^2}\right)\end{aligned}$$

som ønsket. □

§4.1.e

Argumenter nu for, at

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

Lemma

For et givet x og $c \neq -1$ gælder

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2n(1+c)^2} = 0.$$

Bevis. Lad x og c være givet ($c \neq -1$ da $x > -1$ og c er mellem x og 0), og lad $k = \frac{x^2}{2(1+c)^2}$ være en konstant. Da er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2n(1+c)^2} = \lim_{n\to\infty} k \cdot \frac{1}{n} = k \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = k \cdot 0 = 0.$$

□

Nu er vi nået til at bevise opgavens resultat.

Bevis. Da exp er kontinuert følger det, at

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \exp\left(x - \frac{x^2}{2n(1+c)^2}\right) &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{x^2}{2n(1+c)^2}\right)\right) \\ &= \exp\left(x - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{2n(1+c)^2}\right)\right) \\ &= \exp(x-0) \qquad \text{af lemmaet} \\ &= \exp(x)\end{aligned}$$

som ønsket. □

§4.2

Betragt funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

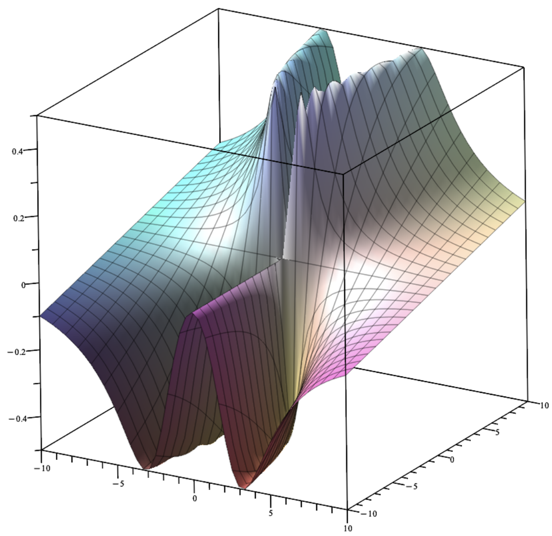
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

§4.2.a

> Tegn ved hjælp af Maple grafen for f, og brug `contourplot` til at illustrere nogle udvalgte niveaukurver omkring origo.

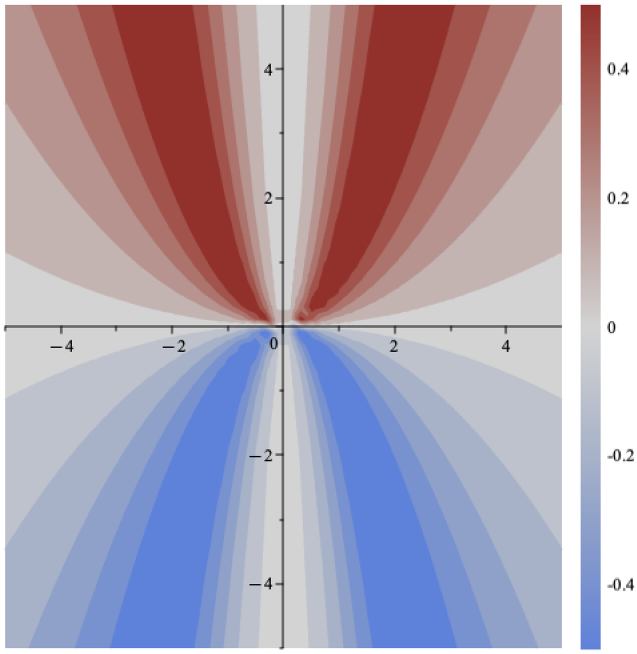
Nedenstående kommando anvendes til at tegne et $3D$-plot af f.

```
f := (x, y) -> x^2*y/(x^4 + y^2);
plot3d(f);
```



Nedenstående kommando anvendes til at tegne nogle udvalgte niveaukurver for f omkring origo.

```
with(plots);
contourplot(f, -5 .. 5, -5 .. 5, contours = 10, filled);
```



§4.2.b

> Vis, at niveaukurven beskrevet ved $f(x, y) = 1$ er den tomme mængde.

Bevis. Vi løser ligningen $\frac{x^2y}{x^4+y^2} = 1$ for $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ da f's anden forgrening ikke er relevant. Bemærk, at

$$\frac{x^2y}{x^4 + y^2} = 1 \iff x^2y = x^4 + y^2$$

så $y > 0$ fordi ellers er venstresiden ikke-positiv, og heraf at $x \neq 0$. Lad nu $z = x^2$, så $z > 0$. Så vi skal løse $zy = z^2 + y^2$ for positive (z, y), men det følger af AM-GM-uligheden at

$$zy < 2zy \leqslant z^2 + y^2,$$

og derfor er der ingen sådanne løsninger. Derfor er niveaukurven $N_f(1)\colon f(x, y) = 1$ netop givet ned

$$N_f(1) = \{(x, y) \mid f(x, y) = 1\} = \emptyset$$

som ønsket. □

§4.2.c

> Vis, at enhver parabel med ligning på formen $y = cx^2$ med undtagelse af punktet $(0, 0)$ er indeholdt i en niveaukurve for f.

Lad $c \in \mathbb{R}$ være givet, og lad $t = \dfrac{c}{1 + c^2}$. Da påstås følgende:

Påstand — Parablen $y = cx^2$ uden $(0,0)$ er indeholdt i niveaukurven givet ved $f(x,y) = t$. Med andre ord gælder

$$A \coloneqq \{(x, cx^2) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subseteq N_f(t) = \{(x,y) \mid f(x,y) = t\}.$$

Bevis. Det er tilstrækkeligt at vise, at når $(a,b) \in A$, så $(a,b) \in N_f(t)$. Antag derfor $(a,b) \in A$, dvs. punktet ligger på parablen $y = cx^2$, altså $b = ca^2$. Da haves

$$\begin{aligned} t &= \frac{c}{1+c^2} \\ &= \frac{a^4}{a^4} \cdot \frac{c}{1+c^2} \\ &= \frac{a^4 c}{a^4(1+c^2)} \\ &= \frac{a^2 ca^2}{a^4 + c^2 a^4} \\ &= \frac{a^2 b}{a^4 + b^2} \\ &= f(a,b) \end{aligned}$$

hvilket netop viser at $(a,b) \in N_f(t)$ som ønsket. Da c var vilkårligt valgt har vi nu vist det for samtlige $c \in \mathbb{R}$. Dette fuldfører altså opgaven. $\square$

§4.2.d

Er f en kontinuert funktion?

Påstand — Nej, f er ikke kontinuert.

Bevis. Vi ved, at $f(0,0) = 0$ pr. definition, men

$$\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Af dette følger, at f ikke er kontinuert i $(0,0)$, hvorved f ikke generelt er kontinuert. $\square$